CHAPITRE I
Logique, Ensembles, Applications *(2017-2018)*

A) LOGIQUE

UNE logique est une formalisation, parmi d'autres possibles, des raisonnements considérés valides ; une logique pose les règles d'obtention, à partir de premiers énoncés, de nouveaux énoncés correctement déduits. UNE logique résulte du choix des règles, et du langage, que l'on se donne. La formalisation ouvre aussi la voie au calcul automatisé (informatique).

I) CALCUL DES PROPOSITIONS

1) Propositions

Déf : Une proposition est un énoncé auquel on peut donner en logique classique l'une des deux valeurs de vérité, V ou F.

Rq : On dit que la logique classique est bivalente.

Déf : Une assertion, ou proposition atomique, est un énoncé qui ne dépend pas d'un autre énoncé.

Ex : « 1+2=3 » est une assertion vraie, « 1+2=4 » est fausse, « 1+= » n'est pas une assertion correctement formulée.

Déf : Au contraire d'une proposition atomique, un prédicat est un énoncé P(x,y,z,…) dépendant de termes, tel que, lorsqu'on substitue à ces termes des éléments de certains ensembles, on obtienne une assertion vraie ou fausse. Le nombre d'argument qu'accepte un prédicat est appelé son arité.

Ex : « x+y=z » est un prédicat d'arité 3.

Rq : les arguments de P peuvent aussi être des propositions : « (P ET Q)$\Longrightarrow$R »

2) Connecteurs

a) Définition : Les *connecteurs* d'une logique sont des symboles représentant des fonctions logiques par lesquelles, à partir d'assertions, on en fabrique de nouvelles .

Ex : connecteur « ET » : à deux propositions P et Q on associe leurs valeurs de vérité, V ou F, et on regarde la valeur de P ET Q ; il en résulte la table de vérité du connecteur « ET » :

↓P / Q→	V	F
V	**V**	**F**
F	**F**	**F**

Rq : On peut remplacer V et F par 0 et 1, ou tout autre symbole arbitraire

Thm : Un connecteur logique correspond à la donnée de quatre cases contenant « V » ou « F », il y a donc 2^4=16 connecteurs.

b) Les cinq connecteurs élémentaires :

Déf : Si P et Q sont des assertions, alors :

Négation : NON P (notation : $\neg P$) prend la valeur V lorsque P prend la valeur F, et vice-versa. (Rq : NON est en fait à part en tant que « connecteur unaire »)

Conjonction : P ET Q (notation : $P \wedge Q$) prend la valeur V lorsque P et Q sont vraies, la valeur F si l'un des deux ou les deux sont fausses.

Disjonction : P OU Q (notation : $P \vee Q$) : prend la valeur F lorsque les deux propositions sont fausses, V sinon.

Implication : P IMPLIQUE Q (notation $P \Rightarrow Q$) : signifie ((NON P) OU Q) ;

Table de vérité de l'implication :

↓P / Q→	V	F
V	**V**	**F**
F	**V**	**V**

/!\ L'implication logique n'est pas la déduction mathématique, et ne signale pas non plus un rapport de causalité.

Équivalence : P ÉQUIVALENT À Q (notation $P \Leftrightarrow Q$) : signifie ($(P \Rightarrow Q)$ ET $(Q \Rightarrow P)$) »,

et voici sa table de vérité :

↓P / Q→	V	F
V	**V**	**F**
F	**F**	**V**

Ex : ((Descartes est à Casa) $\Rightarrow$ (Lyautey est à Rabat)) est une proposition logiquement vraie.

Ex : ((le lycée Descartes se trouve à Casablanca) $\Leftrightarrow$ (le lycée Lyautey se trouve à Rabat)) est une proposition logiquement vraie.

Thm : Deux prédicats (ou assertions) sont équivalents ssi quelles que soient les valeurs données à leurs arguments, la valeur de vérité (V ou F) des deux prédicats est la même.

⟹Méthode : pour établir l'équivalence de deux propositions, on peut soit prouver leur implication réciproque, soit comparer leurs tables de vérité.

Ex 1 : Établir la table de vérité de la proposition suivante : $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow (P \vee Q))$, à quelle proposition plus simple est-elle équivalente ?

Idem avec $(P\Rightarrow Q)\Rightarrow(P\wedge Q)$:

Rq/Déf : la réciproque d'une proposition $P\Rightarrow Q$ est $Q\Rightarrow P$. Il s'agit de deux propositions indépendantes toutes deux susceptibles d'être vraies ou fausses, séparément.

Ex : La négation de $(P\Leftrightarrow Q)$ est-elle NON(P)⇔NON(Q) ?

Rq pour conclure : restent 16-4 (on ne compte pas le connecteur unaire NON)=12 connecteurs hors programme ; l'un au moins est instructif à comparer à la disjonction OU le connecteur de disjonction exclusive XOR : P XOR Q est V ssi seulement l'une exactement des deux P ou Q est vraie. Sa table de vérité :

↓P / Q→	V	F
V	**F**	**V**
F	**V**	**F**

c) Calcul et simplification des propositions

On simplifie les propositions en utilisant des équivalences tautologiques.

Déf : une tautologie est une proposition dont la valeur de vérité est toujours V, quelle que soit la vérité des assertions qui la composent.

Thm (tautologies les plus utiles) : Les propositions suivantes sont TOUJOURS VRAIES :

$(P\vee\neg P)$ Tiers exclu

$\neg(P\wedge\neg P)$ Non contradiction

$(P\wedge F)\Leftrightarrow F$

$(P\vee V)\Leftrightarrow V$

$(P\wedge V)\Leftrightarrow P$

$(P\vee F)\Leftrightarrow P$

$P\Leftrightarrow P$

$\neg(\neg P)\Leftrightarrow P$ Double négation

$(P\wedge P)\Leftrightarrow P$, $(P\vee P)\Leftrightarrow P$

$(P\wedge(Q\wedge R))\Leftrightarrow((P\wedge Q)\wedge R)$ (associativité de $\wedge$)

$(P\vee(Q\vee R))\Leftrightarrow((P\vee Q)\vee R)$ (associativité de $\vee$)

$(P\wedge(Q\vee R))\Leftrightarrow((P\wedge Q)\vee(P\wedge R))$ (distributivité de $\wedge$ sur $\vee$)

$(P\vee(Q\wedge R))\Leftrightarrow((P\vee Q)\wedge(P\vee R))$ (distributivité de $\vee$ sur $\wedge$)

Lois de Morgan (ou « de dualité ») : $\neg(P\wedge Q)\Leftrightarrow(\neg P\vee\neg Q)$ $\neg(P\vee Q)\Leftrightarrow(\neg P\wedge\neg Q)$

Transitivité de l'implication : $((P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow R))\Rightarrow(P\Rightarrow R)$

Ex 2 (lois Morgan) : non (rouge et bleu)… non (rouge ou bleu)…

Une application importante aux lois de Morgan : $\boxed{\text{Thm : NON}(P\Longrightarrow Q)\Leftrightarrow(P\text{ ET NON}(Q))}$

Rq : / !\ pas d'associativité de ET et OU : (P ET (Q OU R)) non équivalent à ((P ET Q) OU R)

⟹Méthode : pour établir l'équivalence de deux propositions on peut aussi utiliser les tautologies comme des règles de transformation des propositions.

Ex 3 : grâce à ces tautologies, prouvez que $(P\vee(\neg P\wedge Q))\Leftrightarrow(P\vee Q)$…

…et simplifiez $\neg(P\vee(P\vee Q))$

> Rq : Pour montrer l'équ. de trois propositions P, Q et R, on peut montrer $P\Longrightarrow Q\Longrightarrow R\Longrightarrow P$ (et même chose avec plus de trois propositions.

3) La déduction mathématique

Les mathématiques sont construites à partir d'un ensemble d'assertions indémontrables mais que l'on s'entend pour accepter comme vraies, les axiomes. À partir des axiomes on déduit de proche en proche tous les théorèmes.

Principaux modes de raisonnements déductifs :

MODUS PONENS : Si P vrai et $(P\Rightarrow Q)$ alors Q vrai

TRANSITIVITÉ DE L'IMPLICATION

On montre que $P\Longrightarrow Q$ et $Q\Longrightarrow R$, ainsi $P\Longrightarrow R$

CONTRAPOSÉE : $(P\Rightarrow Q)\Leftrightarrow(\neg Q\Rightarrow\neg P)$

[[Démo :

]]

ABSURDE : $((\neg P\Rightarrow Q)\wedge(\neg P\Rightarrow\neg Q))\Rightarrow P$

Supposer la fausseté d'une proposition entraîne une contradiction $(Q\wedge\neg Q)$, donc la propriété est vraie.

DISJONCTION DES CAS : $((P\Rightarrow R)\wedge(Q\Rightarrow R)\wedge(P\vee Q))\Rightarrow R$

Si P et Q impliquent chacun R, et que P ou Q (l'un au moins) est vrai, alors R est démontré.

Exemples de raisonnements par l'absurde dans les petites classes : SI zéro avait un inverse alors tous les nombres seraient égaux à 0 ; SI $\sqrt{2}$ était égal à une fraction réduite alors cette fraction pourrait encore se réduire…

Ex 4 : raisonnement par contraposée en arithmétique : démontrer que si n^2 est impair alors n est impair :

II) CALCUL DES PRÉDICATS ; QUANTIFICATEURS

La plupart des propositions mathématiques ne sont pas vraies ou fausses dans l'absolu, mais en fonction de la valeur d'une certaine variable prise dans un certain ensemble.

Ex : P : « n est pair » n'est pas vraie ou fausse dans l'absolu, cela dépend de la valeur de la variable $n \in N$. P devient donc une fonction P(n) de N sur {V ; F} (P(2)=V, P(3)=F etc.)

Un prédicat peut être vrai pour tous les termes de l'ensemble considéré (appelé « ensemble sous-jacent »), pour certains termes, pour aucun, pour quelques uns, etc… D'où la nécessité d'utiliser des quantificateurs :

Déf : le quantificateur universel est noté $\forall$, le quantificateur existentiel $\exists$.

$\exists x \in E, P(x)$: « il existe un élément x de l'ensemble E tel que la propriété P(x) soit vraie »

$\exists ! x \in E, P(x)$: « il existe un unique élément x de E tel que la propriété P(x) soit vraie »

$\forall x \in E, P(x)$: « pour tout élément x de l'ensemble E, la propriété P(x) est vraie »

Rq : ces trois propositions, « $\exists x \in E, P(x)$ », « $\exists ! x \in E, P(x)$ » « $\forall x \in E, P(x)$ » sont d'arité 0, leur validité ne dépendent d'aucun argument, x n'y est pas un argument mais une variable muette (intérieure à la proposition).

/ !\ : L'ordre des quantificateurs importe : $\forall x \exists y$… n'est pas équivalent à $\exists y \forall x$…. En particulier, si $\forall x$ précède $\exists y$, le « y » dépend du « x » considéré et devrait en toute rigueur se noter « y_x ».

/ !\ : un contre-exemple ne peut invalider qu'un « $\forall$ » et non un « $\exists$ ».

Ex 5 : Écrire avec des quantificateurs :

a) f est la fonction nulle (où f est une fonction de R dans R).

b) f s'annule au moins une fois sur R.

c) f est l'identité de R (c'est-à-dire la fonction qui, à chaque réel, associe lui-même).

d) f est croissante sur R (où f est une fonction de R dans R).

e) L'équation sinx=x a une et une seule solution dans R.

Les propositions avec quantificateurs donnent lieu à de nouvelles tautologies à partir desquelles on les transforme, en particulier :

Thm : négation des quantificateurs :
$\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x, \neg(P(x)))$ (« pas tous P » ⇔ « il existe un Non P »)
$\neg(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow (\forall x, \neg(P(x)))$

Ex 6 : Traduire en langage naturel les tautologies suivantes :
$(\forall x, P(x)) \Rightarrow (\exists x)(P(x))$

$(\forall x)(P(x) \wedge Q(x)) \Leftrightarrow (\forall x)(P(x)) \wedge (\forall x)(Q(x))$

Rq : $\neg(a \leq b) \Leftrightarrow (a > b)$
/ !\ Nier les quantificateurs n'est pas passer au complémentaire de l'ensemble de référence, ex :
$\neg(\exists x>0, f(x)>M) \Leftrightarrow \ldots$

Ex 7 : Ecrire avec des quantificateurs les propositions suivantes:
a) Tout entier naturel est pair ou impair.

b) Tout entier naturel est pair ou tout entier naturel est impair.

b) f est strictement monotone sur R (où f désigne une fonction de R dans R).

d) f n'est pas strictement monotone sur R.

Ex 8 : Ecrire avec deux quantificateurs et deux variables les propositions suivantes :
a) f est constante sur R (où f est une fonction de R dans R).

b) f n'est pas constante sur R.

c) Pour chaque entier, on peut trouver un entier strictement plus grand.

d) Il existe un entier plus grand que tous les autres entiers.

B) ENSEMBLES

I) GÉNÉRALITÉS : DES ENSEMBLES D'ENSEMBLES D'ENSEMBLES…

1) Non-définitions

Les ensembles ont des éléments qui leur appartiennent. Il est impossible de définir l'appartenance, on note $x \in E$ pour signifier l'appartenance d'un objet x à l'ensemble E. On lit « x appartient à E ou x est un élément de E »

Les éléments d'un ensemble peuvent être également des ensembles.

En théorie des ensembles, tout objet mathématique est un ensemble. Dans l'assertion le sens du « $\in$ » indique que x joue le rôle d'un élément et E celui d'un ensemble, mais on peut avoir : « $y \in x$ et $x \in E$ » où x est un ensemble contenant y et un élément de l'ensemble E.

Ensemble vide : Il existe un « ensemble vide » tel que $\neg(x \in \varnothing)$ est vrai pour tout objet x.

2) Inclusion et égalité

Axiome d'extensionalité : deux ensembles sont égaux ssi ils ont les mêmes éléments. D'où :

Déf : Soient A et B deux ensembles, A est inclus dans B ssi $\forall x \in A, x \in B$. Notation : $A \subset B$. A est alors un sous-ensemble ou une partie de B.

Déf équivalente : $A \subset B$ ssi $\forall x \in E, x \in A \Rightarrow x \in B$

Ex : $N \subset Z \subset Q \subset R$.

$\Longrightarrow$Méthode Pour prouver que $A \subset B$ on prouve que tout élément de A est dans B.

Ex 9 : Soient A, B, C, D, Ω les ensembles : $A=\{1,2\}$ $B=\{3,4\}$ $C=\{1,4,5\}$ $D=\{7,8,9,10\}$ $\Omega=\{A,B,C,D\}$

- Combien Ω compte-t-il d'éléments ?

- A est-il inclus dans Ω ?

- Le nombre 2 est-il dans (=est-il un élément de) Ω ? L'ensemble {2} est-il dans Ω ?

- Donner des sous-ensembles de Ω.

Prop : si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$ (transitivité) ; $A \subset A$ (réflexivité) ; $\emptyset \subset A$

Ex 10 : Prouvez par l'absurde que $\emptyset \subset A$

Déf: Soient A et B deux ensembles, on définit la relation d'égalité par $A=B$ ssi $A \subset B$ et $B \subset A$

⟹Méthode Pour démontrer que deux ensembles sont égaux on démontre leur inclusion réciproque (càd que tout élément de l'un est dans l'autre, et réciproquement)

/ !\ : L'ensemble vide est inclus dans tout autre ensemble, appartient-il à tous les ensembles ?

Ex 11 : Soit E l'ensemble des nombres entiers de la forme k^2-1 avec k non multiple de 3, et F l'ensemble des multiples de 3. Dmq $E\subset F$; a-t-on $F\subset E$?

II) CONSTRUCTION DES ENSEMBLES

1) Par définition des ensembles :

a) Définition en extension (ou énumération) : ex ECS1={… ; … ; … ; …

b) Définition en compréhension (par une propriété caractéristique) : ex ECS1={ensemble des élèves inscrits en ECS1}.

2) Par opérations sur les ensembles :

Union : $\boxed{A\cup B=\{x \text{ tels que } x\in A \text{ ou } x\in B\}}$

Différence : $\boxed{A\setminus B=\{x\in A \text{ tq } x\notin B\}}$ (« A privé de B »)

Thm : $A\setminus B=A\cap \overline{B}$.

Démo :

Intersection : $\boxed{A\cap B=\{x \text{ tels que } x\in A \text{ et } x\in B\}}$

Déf : A et B sont dits « disjoints » ssi $A\cap B=\varnothing$

Complémentaire : si A sous-ensemble d'un ensemble E, $\overline{A}=E\setminus A$. Autre notation : $C_E A$

⟹Méthode

- Si un élément x est dans une intersection d'ensembles $A\cap B\cap C\cap\ldots$, on peut en déduire que x est dans chacun des ensembles : $x\in A$ ET $x\in B$ ET $x\in C$... Et réciproquement.
- Si un élément x est dans une union d'ensembles $A\cup B\cup C\cup\ldots$, on peut en déduire que x est dans au moins un des ensembles : $x\in A$ OU $x\in B$ OU $x\in C$... Et réciproquement.

Propriétés (E, F, G ensembles) :

$E\cup\varnothing=E$ et $E\cap\varnothing=\varnothing$, $\varnothing\subset E$ (l'ensemble vide est inclus dans tout ensemble)

$E\subset F$ ssi $E\cap F=E$ ssi $E\cup F=F$

$E\cup F=F\cup E$ et $E\cap F=F\cap E$ (commutativité)

$(E\cup F)\cup G=E\cup(F\cup G)=E\cup F\cup G$ et $(E\cap F)\cap G=E\cap(F\cap G)=E\cap F\cap G$ (associativité)

$(E\cap F)\cup G = (E\cup G)\cap(F\cup G)$ et $(E\cup F)\cap G = (E\cap G)\cup(F\cap G)$ (distributivité)

$C_E(A\cup B)=(C_E A)\cap(C_E B)$ et $C_E(A\cap B)=(C_E A)\cup(C_E B)$ Lois de Morgan

Cas de n ensembles $E_1, E_2, E_3 \dots E_n$: on peut former $\bigcup_{i=1}^{n} E_i$, $\bigcap_{i=1}^{n} E_i$ voire, pour un nombre infini (mais dénombrables) d'ensembles : $\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i$ $\bigcap_{i=1}^{+\infty} E_i$

3) Produit cartésien :

Déf : Soient E et F deux ensembles. On note $E\times F=\{(x,y)/x\in E,\ y\in F\}$

Ex 12: Pour $E=\{a\ ;\ b\}$ et $F=\{0\ ;\ 1\}$, $E\times F=\{$

Rq : $(x\ ;\ y)$ est un couple ordonné, $(x\ ;\ y)\neq(y\ ;\ x)$. Une définition possible en terme d'ensembles est $(x\ ;\ y)=\{\ \{x\}\ ;\ \{x\ ;\ y\}\ \}$ où le premier élément du couple (càd le singleton $\{x\}$) est celui qui est inclus dans l'autre (le doublet $\{x\ ;\ y\}$).

Rq suite : Il en résulte, $\{x\ ;\ y\}\subset (x\ ;\ y)$

Prop : Si $z\in E\times F$ et $z'\in E\times F$, avec $z=(x,y)$ et $z'=(x',y')$ alors $z=z' \Leftrightarrow x=x'$ et $y=y'$

Cas de n ensembles $E_1, E_2, E_3 \dots E_n$:
on peut former $\bigotimes_{i=1}^{n} E_i = \{(x_1,x_2,\dots,x_n)\ /\ \forall i\in\{1,2,\dots n\},\ x_i\in E_i\}$ (n-uplet d'éléments de $E_1, E_2,\dots,E_n$)

En particulier : On note :

$R^2=R\times R=\{(x,y)/x\in R,\ y\in R\}$

$R^3=R\times R\times R=\{(x,y,z)/x\in R,\ y\in R,\ z\in R\}$

$R^n=\{(x_1,x_2,\dots,x_n)\ /\ \forall i\in\{1,2,\dots n\}\ x_i\in E_i\}$ (notation équivalente R_n)

III ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

Déf : Pour tout ensemble E, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des sous-ensembles d'un ensemble. On a toujours $E\in\mathcal{P}(E)$ et $\varnothing\in\mathcal{P}(E)$.

Ex 13 : $E=\{a\ ;\ b\ ;\ c\}$, $\mathcal{P}(E)=\{$

Ex 14 : Si E est un ensemble à N éléments, combien admet-il de parties ?

Déf partition d'un ensemble : Un ensemble (ou « classe ») $\{E_1, E_2,\dots,E_n\}$ de parties d'un ensemble E est une partition finie de E ssi :

i) $\forall i\in\{1,2,\dots n\}\ E_i\neq\varnothing$ ET ii) $\bigcup_{i=1}^{n} E_i=E$ ET iii) $\forall i,j\in\{1,2,\dots n\}$ tq $i\neq j$, $E_i\cap E_j=\varnothing$.

Ex 15 : Donner toutes les partitions possibles de l'ensemble E ci-dessus :

Ex 16 : Donner des exemples de partitions de N ? de R ?

<u>Partition infinie</u> : Un ensemble (ou « classe ») $\{E_1, E_2,\ldots,E_n,\ldots\}$ de parties d'un ensemble E est une partition infinie de E ssi :

i) $\forall i\in\{1,2,\ldots+\infty\}\ E_i\neq\varnothing$ ET ii) $\bigcup_{i=1}^{+\infty} E_i=E$ ET iii) $\forall i,j\in\{1,2,\ldots+\infty\}$ tq $i\neq j$, $E_i\cap E_j=\varnothing$.

<u>Ex 17</u> : Donner des exemples de partitions infinies de N ? de R ?

C) APPLICATIONS

I) DÉFINITIONS

<u>Déf</u> : Une <u>correspondance</u> f est un triplet (A, B, gr(f)) avec A et B des ensembles, gr(f) une partie de $A\times B$ ($gr(f)\in\mathcal{P}(A\times B)$). A est appelé ensemble de définition (ou de départ), B ensemble d'arrivée, gr(f) graphe de la correspondance f.

<u>Dessin</u> :

<u>Déf</u> : On dit que $x\in A$ <u>admet une image</u> dans B ssi $\exists y\in B$ tq $(x,y)\in gr(f)$

<u>L'image de $x\in A$</u>, notée f(x), est l'ensemble des $y\in B$ tels que $(x,y)\in gr(f)$

L'image directe de f, notée f(A) ou Im(f), est l'ensemble des $y\in B$ tels que $\exists x\in A$ tq $y\in f(x)$

<u>Ex</u> : A={a ; b ; c ; d}, B={rouge, orange, vert} et gr(f)={(a ; rouge) ; (b ; rouge) ; (d ; vert) ; (a ; vert)}

Rq : dans cet exemple a admet deux images, f(a)={rouge; vert}. Les éléments de l'ensemble de déf/départ d'une correspondance peuvent admettre plusieurs images.

<u>Ex</u> : Soit la correspondance Racbis définie sur $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ par : $(x,y)\in gr(Racbis)$ ssi $y^2=x$. Alors Racbis(4)={-2 ; 2}, mais <u>/ !\</u> $\sqrt{4}=2$ UN POINT C'EST TOUT !

<u>Déf</u> : Une <u>fonction</u> f est une correspondance (A, B, gr(f)) telle que pour tout $x\in A$, il existe au plus un $y\in B$ tel que $(x,y)\in gr(f)$.

L'ensemble de définition de f est $D_f=\{x\in E\ /\ \exists y\in B \text{ tq } (x\ ;\ y)\in gr(f)\}$, $D_f\subset A$.

Dessin :

Thm : $f(A)=Im(f)=\{f(x)\in B\ /\ x\in A\}$, c'est une partie de B

De même pour toute partie $C\subset A$, $f(C)=\{f(x)\ /\ x\in C\}$ est une partie de B.

Ex : A={a ; b ; c ; d}, B={rouge, orange, vert} et gr(f)={(a ; rouge) ; (b ; rouge) ; (d ; vert)}
Rq : dans cet exemple c n'est pas dans D_f.

Déf : une application f est une fonction (A, B, gr(f)) telle que $\forall x\in A\ \exists! y\in B$ tq $(x,y)\in gr(f)$.

(L'ensemble de définition coïncide avec l'ensemble de départ : tout élément a une unique image)

Dessin :

Ex : A={a ; b ; c ; d}, B={rouge, orange, vert} et gr(f)={(a ; rouge) ; (b ; rouge) ; (c ; vert) ; (d ; vert)}

Ex : Exp est une application sur $\mathbb{R}$; Ln est une fonction sur $\mathbb{R}$ (et une application sur $\mathbb{R}^{+*}$).

L'ensemble des applications de A dans B, est noté : $\mathcal{A}(A, B)$ ou B^A ou $\mathcal{F}(A, B)$

/ ! \ : la notation $\mathcal{F}(A, B)$ peut induire en erreur car le « $\mathcal{F}$ » fait penser au mot « fonction »

$\Longrightarrow$Méthode pour montrer que deux applications sont égales, on vérifie qu'elles sont définies sur les mêmes ensembles, puis on montre que les images de tous les éléments de l'ensemble de départ par chacune des deux applications sont les mêmes.

Déf : Soit E un ensemble et $A\subset E$; l'indicatrice de A (aussi appelée fonction caractéristique), notée 1_A (ou χ_A) est l'application $E\to[0 ; 1]$ telle que $1_A(x)=1$ si x est dans A, 0 sinon.

Ex : E=R, A=[-1 ; 4], $1_A(-2)=0$, $1_A(-1)=1$, $1_A(0,3)=1$, $1_A(10)=0$…

Ex 18 : Déterminer deux applications f, g : $R\to R$ non nulles telles que $\forall x\in R\ f(x)\times g(x)=0$

II) Applications injectives, surjectives, bijectives

Déf : Soit $f\in\mathcal{F}(A, B)$ (autre notation $f : A\to B$). On dit que f est :

- injective ssi $\forall x, x'\in A\ f(x)= f(x') \Rightarrow x=x'$
- surjective ssi $\forall y\in B, \exists x\in A$ tq $f(x)=y$
- bijective ssi $\forall y\in B, \exists!\ x\in A$ tq $f(x)=y$

Dessin :

Rq/Thm : En général $f(A)\subset B$; en particulier $f\in\mathcal{F}(A, B)$ est surjective ssi $f(A)=B$

Thm : $f\in\mathcal{F}(A, B)$ est bijective ssi elle est injective et surjective.

⟹Méthode : —Pour démontrer qu'une application est injective on prouve que $f(x)=f(y)\Longrightarrow x=y$
—pour démontrer qu'elle n'est pas injective on trouve un contre-exemple $x\neq y$ et $f(x)=f(y)$

⟹Méthode —Pour démontrer que f surjective on prouve que $\forall y\in B\ \exists x\in A$ tq $f(x)=y$ OU BIEN que $f(A)=B$

—pour démontrer que f n'est pas surjective on trouve un contre exemple $y\in B$ qui n'a pas d'antécédent.

⟹Méthode Pour démontrer que f bijective on peut

—prouver que f injective et surjective

—ou bien prouver que $\forall y\in B\ \exists\ !$(unique) $x\in A$ tq $f(x)=y$; cette méthode est parfois plus difficile à rédiger mais elle a l'avantage de fournir aussi l'expression de $f^{-1}(y)$

⟹Méthode pour démontrer que f non bijective on prouve par un contre-exemple qu'elle n'est pas injective, ou bien pas surjective.

Ex : $f : R \to R$, $x \mapsto x^2$ n'est ni injective ($f(-1)=f(1)$ et $-1\neq1$) ni surjective ($\nexists x\in R$ tq $f(x)=-2$)

La corestriction de f à R^+, $R \to R^+$ est surjective

f restreinte à R^+ corestreinte à R^+ ($R^+ \to R^+$) est bijective.

Rq : la corestriction à f(A) d'une application $f : A\to B$, (notation $f^{|f(A)}$), est surjective

Ex 19 : comment corestreindre exp et ln pour obtenir des fonctions bijectives ?

Ex 20 : $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \right.$ est-elle injective ? surjective ? Peut-on restreindre/corestreindre f pour obtenir une application bijective ?

Mêmes questions pour $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos(x) \end{array} \right.$

Mêmes questions pour $h : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \tan(x) \end{array} \right.$

⟹Méthode Résoudre f(x)=y permet aussi, dans le cas où il n'y a pas, pour tout y, un unique antécédent x, de déterminer les ensembles auxquels on peut restreindre (resp. corestreindre) f pour obtenir une application injective (resp.surjective).

Ex 21 : Étudier les injectivité, surjectivité, bijectivité éventuelles de l'application

$i : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x-y,x+y,x-2y) \end{array} \right.$

Application aux équations : Soit $f \in \mathcal{F}(A, B)$,

f est injective ssi $\forall y \in B$ l'équation d'inconnue x, y =f(x) admet **au plus** une solution dans A.

f est surjective ssi $\forall y \in B$ y = f (x) admet **au moins** une solution dans A.

f est bijective ssi $\forall y \in B$ y = f (x) admet **exactement** une solution dans A.

III) ENSEMBLE « IMAGE RÉCIPROQUE » D'UNE APPLICATION QUELCONQUE

Thm : Soit une application $f : A \to B$; alors $\forall y \in B$, on note $f^{-1}(y)$ l'ensemble des antécédents de y dans A, càd l'ensemble $\{x \in A \ / \ f(x)=y\}$.

Pour toute partie C de B on note $f^{-1}(C)$ l'ensemble de tous les antécédents de tous les éléments de C, càd l'ens. $\{x \in A \ / \ \exists y \in C \text{ tq } f(x)=y\}$, appelé image réciproque de C par f.

Ex 22 : f : $[0 ; 2\pi] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)$. Images réciproques de $\mathbb{R}^+$? de $\mathbb{R}^-$? de [1/2 ; 1] ? de [2 ; 3] ?

IV) APPLICATION RÉCIPROQUE D'UNE APPLICATION BIJECTIVE

Thm : Une application $f : A \to B$ est bijective ssi il existe une fonction $g : B \to A$ telle que $g \circ f = Id_A$ (càd $\forall x \in A\ g[f(x)]=x$) ET $f \circ g = Id_B$ (càd $\forall y \in B\ f[g(y)]=y$). Dans ce cas g est unique et notée f^{-1}, elle est appelée bijection réciproque de f.

Ex 23 : A={a ; b ; c} et B={d ; e ; f}, et $f : A \to B$ définie par f(a)=e ; f(b)=f ; f(c)=d

Thm : $f \in \mathcal{A}(A,B)$ est bijective ssi $\exists g \in \mathcal{A}(A,B)$ tq $(\forall x \in A, \forall y \in B\ [y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)])$

Thm : si f et h bijectives alors foh bijective, et dans ce cas $(foh)^{-1} = h^{-1} o f^{-1}$

/ ! \ Réciproque fausse : foh peut être une bijection sans que f ni h le soient.

Contre-exemple 24: h : $\{1,2,3\} \to \{A,B,C,D\}$, h(1)=A, h(2)=B, h(3)=C

f: $\{A,B,C,D\} \to \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $f(A)=\alpha$, $f(B)=\beta$, $f(C)=f(D)=\gamma$

Application à l'analyse (étude des fonctions) : Ici I et J sont des intervalles de R et $f : I \to J$

Thm (variations) : Si f monotone et bijective de I vers J alors $f^{-1} : J \to I$ monotone de même sens que f (si f croissante f^{-1} croissante etc…).

[Démo : Supposons f croissante, alors $\forall a,b \in I$, $a \geq b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$. Soient alors $a',b' \in J$ tels que $a' \geq b'$, $\exists! a,b \in I$ tq $a'=f(a)$ et $b'=f(b)$. Absurde: si $a<b$ alors $f(a)=a'<b'=f(b)$ contradiction ; donc $a \geq b$, càd puisque $a=f^{-1}(a')$ et $b=f^{-1}(b')$, $f^{-1}(a') \geq f^{-1}(b')$ et f^{-1} croissante. Cqfd]

Thm (graphe) : Soit f une application bijective de I dans J, où I et J sont deux sous-ensembles de R. On note C_f la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé. Alors $C_{f^{-1}}$ est le symétrique de C_f par rapport à la droite d'équation y=x.

[Démo : $y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y)$]

Ex : racine carrée réciproque de la fonction carrée sur R^{+}, exp réciproque de Ln…

⟹Méthode : Pour démontrer qu'une fonction de ℝ vers ℝ est injective, surjective ou bijective, on peut aussi utiliser le tableau de variations.

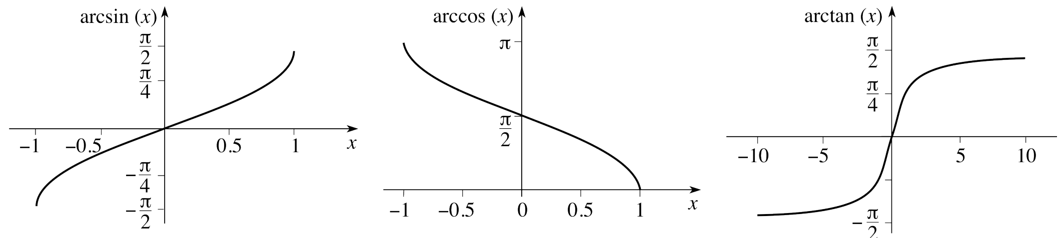
Exemple des fonctions trigonométriques inverses :

Sin n'est pas bijective sur R, **$\sin^{-1}$ n'existe pas !** En revanche $\tilde{f} : \left| \begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] & \to & [-1;1] \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array} \right.$ est bijective, on définit:

$$\text{Arcsin} : \left| \begin{array}{ccc} [-1;1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \\ y & \mapsto & x, \text{ unique réel de } \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \text{ tel que } \sin(x) = y \end{array} \right.$$

De même **pas de $\cos^{-1}$**, on pose $\text{Arcos} : \left| \begin{array}{ccc} [-1;1] & \to & [0;\pi] \\ y & \mapsto & x, \text{ unique réel de } [0;\pi] \text{ tel que } \cos(x) = y \end{array} \right.$

Et $\text{Arctan} \left| \begin{array}{ccc}]-\infty;+\infty[& \to &]-\pi/2;\pi/2[\\ y & \mapsto & x, \text{ unique réel de }]-\pi/2;\pi/2[\text{ tel que } \tan(x) = y \end{array} \right.$



(a) (b) (c)